مناظرات إعادة التوجيه الجامعي (دورة 2023)

نوعية الاختبار: رياضيات — الشعبة: الإجازة في علوم الإعلامية والإجازة في علوم التصرف

تاريخ الاختبار: الجمعة 24 مارس 2023 — مدة الاختبار: ساعتان (2) من س 09 إلى س 11 صباحا.

Exercice 1 : (10 points) (Obligatoire).

Partie I: Étude d'une fonction auxiliaire

Soit g la fonction définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par :

$$g(x) = \ln(x) + 2x - 2.$$

1. Déterminer les limites de g en $+\infty$ et 0.
2. Déterminer le sens de variation de la fonction g sur $]0\ ;\ +\infty[$.
3. Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α sur $]0\ ;\ +\infty[$.
4. Calculer $g(1)$ puis déterminer le signe de g sur $]0\ ;\ +\infty[$.

Partie II : Étude d'une fonction f

On considère la fonction f, définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par:

$$f(x) = \left(2 - \frac{1}{x}\right)(\ln(x) - 1).$$

1. (a) On admet que la fonction f est dérivable sur $]0\ ;\ +\infty[$ et on note f' sa dérivée. Démontrer que, pour tout x de $]0\ ;\ +\infty[$, on a :

$$f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}.$$

   (b) Dresser le tableau de variation de la fonction f sur $]0\ ;\ +\infty[$. Le calcul des limites n'est pas demandé.

2. Résoudre l'équation $f(x) = 0$ sur $]0\ ;\ +\infty[$ puis dresser le tableau de signes de f sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.

Partie III : Étude d'une fonction F admettant pour dérivée la fonction f

On admet qu'il existe une fonction F dérivable sur $]0\ ;\ +\infty[$ dont la dérivée F' est la fonction f.
Ainsi, on a : $F' = f$.
On note $\mathcal{C}_F$ la courbe représentative de la fonction F dans un repère orthonormé . On ne cherchera pas à déterminer une expression de $F(x)$.

1. Étudier les variations de F sur $]0\ ;\ +\infty[$.
2. La courbe $\mathcal{C}_F$ représentative de F admet-elle des tangentes parallèles à l'axe des abscisses Justifie ?

Choisir deux exercices parmi les trois suivants (exercice 2, 3 et 4).

Exercice 2 : (5 points)

On modélise l'évolution de la population de bactéries sur un masque chirurgical (bavette) par une suite (U_n). Initialement, le masque contient 1000 bactéries.

La masse de bactéries l'année n + 1 est obtenue en rajoutant à la masse de bactéries de l'année n, 0.2 fois cette masse puis en soustrayant 100 pour tout entier naturel n.

La suite (U_n) définie de la façon suivante :

$$\begin{cases} U_0 = 1000 \\ U_{n+1} = 1.2\, U_n - 100 \end{cases} \quad \text{pour tout entier naturel n.}$$

1) Que représente U_0.
2)
   a) Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $U_n \geq 1000$.
   b) Démontrer que la suite (U_n) est croissante.
3) On définit la suite (V_n) par : pour tout entier naturel n, $V_n = U_n - 500$.
   a) Démontrer que la suite (V_n) est une suite géométrique.
   b) Exprimer V_n, puis U_n, en fonction de n.
   c) Déterminer la limite de la suite (U_n).

Exercice 3 : (5 points)

Lors d'une soirée, une chaîne de télévision a retransmis un match. Cette chaîne a ensuite proposé une émission d'analyse de ce match.

On dispose des informations suivantes :

- **56 %** des téléspectateurs ont regardé le match.
- **16,2 %** des téléspectateurs ont regardé l'émission.
- **Un quart** des téléspectateurs ayant regardé le match ont aussi regardé l'émission.

On interroge au hasard un téléspectateur. On note les événements :

- **M** : « le téléspectateur a regardé le match »;
- **E** : « le téléspectateur a regardé l'émission ».

On note **x** la probabilité qu'un téléspectateur ait regardé l'émission sachant qu'il n'a pas regardé le match.

1) Construire un arbre pondéré illustrant la situation.
2) Déterminer la probabilité de $M \cap E$.
3)
   a) Vérifier que P(E) = 0,44.x +0,14.
   b) En déduire la valeur de x.
4) Le téléspectateur interrogé n'a pas regardé l'émission. Quelle est la probabilité, arrondie à 10^{-2}, qu'il ait regardé le match ?

<u>Exercice 4</u> : (5 points)

Dans le tableau ci-dessous, on donne la part du budget consacré au logement en pourcentage (yi) et x_i est la différence entre l'année en cours et l'année 1970.

	M_1	M_2	M_3	M_4	M_5	M_6	M_7	M_8
Année	1978	1984	1992	1994	2000	2004	**2010**	**?**
x_i	8	14	22	24	30	34	**?**	**?**
y_i	4.4	5.2	4.3	3.2	3.3	2.8	**?**	**2**

1) Représenter le nuage de points dans un repère orthogonal.
2) Déterminer l'équation de la droite (M_1M_6) où M_1 (8,4.4) et M_6 (34,2.8).
3) Donner la part du logement dans le budget en 2010. Représenter le point M_7 correspondant.
4) Déterminer l'année à partir de laquelle la part du logement dans le budget passera sous 2%. Représenter le point M_8 correspondant.
5) Calculer les coordonnées du point moyen G des 6 premiers points. Représenter le point G.