Université de la Manouba **Année universitaire**

2013-2014

Concours de réorientation

Exercice n°1 (4 points)

Soient les intégrales suivants :

$I=\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x^2+2}}$ $J=\int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{x^2+2}}\,dx$ $k=\int_0^1 \sqrt{x^2+2}\,dx$

Soit la fonction f définie sur [0,1] par : $\ln(x+\sqrt{x^2+2})$

1) a- Montrer que f est dérivable sur [0,1] et calculer f'(x)

   b- En déduire la valeur de I

2) a-Sans calculer J et K vérifier que J+2I=K

   b- Montrer que $K=\sqrt{3}-J$

   c- En déduire les valeurs de J et K

Exercice 2:(5 points)

Soit la fonction f définie sur [0 ;+∞[par $f(x)=x+1-\frac{2}{e^{2x}+1}$ et soit (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(0\,;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ (unité graphique 2cm)

1./a. Déterminer la limite de f en +∞

b. Montrer que la droite D :y=x+1 est une asymptote oblique à (C).

c. Etudier la position relative de (C) par rapport à D

2./a. Montrer que pour tout $x\in[0;+\infty[$ $f'(x)=1+\frac{4e^{2x}}{(e^{2x}+1)^2}$

b. Etudier les variations de f

c. Ecrire une équation de la tangente T à la courbe (C) au point d'abscisse 0.

3. /Construire D , T et (C).

4./a. Montrer que pour tout $x\in[0;+\infty[$, $\frac{2}{e^{2x}+1}=\frac{2e^{-2x}}{1+e^{-2x}}$

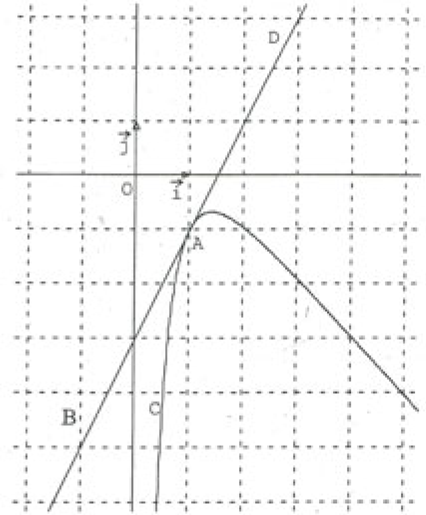
b. Soit k un réel strictement positif.Calculer en fonction de k ,l'aire de la partie du plan limitée par la courbe (C) ,la droite D et les droites d'équations respectives x= 0 et x = k

EXERCICE N°3: (4 points)

Dans le repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ ci-contre, la courbe (C) représente la fonction f définie sur $]0,+\infty[$ par

$f(x)=ax+b\frac{\ln x}{x}$ où a et b sont deux réels.

La droite D est tangente à (C) au point A(1 , −1). Elle passe par le point B(−1 , −5).



1. Déterminer, à l'aide du graphique, $f(1)$ et $f'(1)$.
2. Exprimer $f'(x)$ en fonction de a et b.
3. Déterminer les réels a et b.
4. On admet que $f(x)=-x+3\frac{\ln x}{x}$

   a. Déterminer la limite de f à droite en 0.
   Que peut-on en déduire graphiquement ?

   b. Montrer que la courbe (C) admet la droite Δ d'équation $y=-x$ comme asymptote en $+\infty$
5. Calculer l'aire, en unité d'aire, de la partie du plan limitée par (C), Δ et les droites d'équations $x=1$ et $x=e$

EXERCICE N°4: (3 points)

On considère la suite (I_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par $I_n=\int_0^1(1-x)^n e^x\,dx$

1. En utilisant une intégration par partie, montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on a : $I_{n+1}=(n+1)I_n-1$
2. a) Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $I_n\geq 0$

   b) Montrer que (I_n) est une suite décroissante.

   c) En déduire que (I_n) est une suite convergente
3. a) Montrer que pour tout $x\in[0,1]$ et pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $(1-x)^n e^x\leq(1-x)^n e$

   b) En déduire que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $I_n\leq\frac{e}{n+1}$

   c) Déterminer alors la limite de la suite (I_n)

EXERCICE N°5: (4 points)

Une petite entreprise de textile commercialise des pantalons et des chemises.
Quand un client se présente, il achète au plus un pantalon et une chemises.

1. La probabilité pour qu'un client achète un pantalon est 0,2. La probabilité pour qu'un client achète la chemise quand il a acheté le pantalon est 0,7 et la probabilité qu'il achète la chemise quand il n'a pas acheté le pantalon est 0,1.

a) On note P l'événement « un client achète le pantalon».
On note C l'événement « un client achète la chemise».
Construire un arbre de probabilité décrivant la situation.

b) Montrer que la probabilité de l'événement P∩C est égale à 0,14.

c) Calculer la probabilité de l'événement C.

d) Calculer la probabilité pour qu'un client achète le pantalon quand il a acheté la chemise.

2. Le pantalon est vendue 125 DT et la chemise 45DT.

a) Soit X la variable aléatoire qui prend pour valeurs les dépenses d'un client
Vérifier que l'ensemble des valeurs prises par X est {0, 45 , 125 , 170 }. Déterminer ainsi la loi de probabilité de X

b) Calculer l'espérance mathématique de X.

3. On rappelle que la probabilité pour qu'un client achète l'ensemble pantalon et chemise est 0,14.
On choisit trois clients au hasard. On suppose que le nombre de clients est suffisamment grand pour que ce choix soit assimilé à un tirage successif avec remise.
Quelle est la probabilité qu'un seul client ait acheté un ensemble pantalon et chemise?